## ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной не охватывают все существующие зависимости. Поэтому данное понятие обобщают и вводят понятие функции нескольких переменных**.**

*Определение.* Соответствие f, которое каждой набору *n*  переменных  сопоставляет одно и только одно действительное число , называется **функцией нескольких переменных** и записывается в виде .

Будем рассматривать функции двух переменных, так как все важнейшие факты теории функций двух  переменных переносятся на случай большего числа переменных .

### *§1. Понятие функции двух переменных*

Пусть *D* – это множество упорядоченных пар чисел .

*Опр.* Соответствие f, которое каждой паре чисел  сопоставляет одно и только одно действительное число , называется **функцией двух переменных** и записывается в виде .

При этом *x* и *y* называются ***независимыми переменными* (*аргументами*)**, а – ***зависимой переменной* (*функцией*)**.

Множество  называется ***областью определения*** функции. Множество значений, принимаемых  в области определения, называется ***областью значений*** этой функции и обозначается *E*(*f*)или *E.*

*Пример.* Найти область определения функции .

*Решение.* Функция двух переменных  имеет областью определения множество пар , таких, что . Записывают: . Геометрически область определения представляет некоторую часть плоскости *Oxy*, изображающую решение неравенства . Преобразовав неравенство, получим  - это круг с центром в точке  и радиусом *R*=2.

***Графиком функции*** двух переменных является некоторая поверхность, представляющая собой множество всех точек пространства *Oxyz* с координатами называется ***аппликатой*** точки.

*Пример 1.* На рисунке 23 изображен график функции , представляющий собой полусферу с центром в точке и радиусом *R*=2.

Функцию двух переменных, как и функцию одной переменной, можно задать разными способами: аналитически, таблицей, графиком.

*2*

*x*

*y*

*z*

*O*

*2*

*2*

*Рисунок 1*

Построение графиков функций двух переменных во многих случаях представляет значительные трудности. Поэтому существует еще один способ изображения функции двух переменных, основанный на сечении поверхности  плоскостями , где  - любое число, т.е. плоскостями, параллельными плоскости .

Назовем линией уровня функции  множество точек  плоскости , в которых функция принимает одно и то же значение .

Пример 2. Найти линии уровня функции 

Решение. Найдем линии уровня из условия  Преобразуем данное равенство  Полученное уравнение при условии задает на плоскости семейство концентрических окружностей с центром О(0; 0), радиусом 

§2. Предел и непрерывность функций двух переменных

Опр.1. Множество  всех точек, координаты  и  которых удовлетворяют неравенству , или, короче, , называется -окрестностью точки .

Опр.2. Число  называется пределом функции  в точке , если для   такое, что для всех точек , удовлетворяющих условию , выполняется неравенство .

Используя определение предела функции двух переменных, можно перенести основные теоремы о пределах для функции одной переменной на функции двух переменных. Например, следующую теорему.

Теорема. Пусть функции  и  определены на одном и том же множестве  и имеют в точке  пределы  и . Тогда функции ,  и  имеют в точке  пределы, равные соответственно ,  и 

Пусть на некотором множестве  определена функция , точка  и любая -окрестность точки  содержит точки множества .

Опр.3. Функция  называется непрерывной в точке , если

, или .

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва.

Замечание. Понятия предела и непрерывности функций двух переменных легко обобщаются на функции трех и более переменных.

### *§3. Частные производные первого порядка функции двух переменных*

Пусть задана функция . Так как *x*  и *y* – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение неизменным. Придадим переменной *x* приращение ,сохраняя при этом значения переменной *y* неизменным. Тогда *z* получит приращение, которое называют ***частным приращением z*** по ***x*** и обозначают . Итак,

.

Аналогично получаем ***частное приращение* *z*** по ***y***:

.

***Частная производная*** функции  в точке по переменной ***x*** определяется следующим равенством:



в случае если  существует.

Аналогичным образом определяется и обозначается ***частная производная***по переменной ***y***:



Для обозначения частных производных применяют так же следующие символы 

На практике для нахождения частных производных используют те же правила и формулы, что и в случае дифференцирования функции одной переменной, при этом, определяя , полагают *y* постоянной, а при нахождении  – *x*.

*Пример.* Найти частные производные функции .

*Решение.*



.

### *§4 Геометрический смысл частных производных*

Графиком функции , как было указано выше, является некоторая поверхность.

Рассмотрим геометрический смысл производной  в точке (*x*0;*y*0). Полагаем  тогда график функции  есть линия пересечения поверхности  с плоскостью . Исходя из геометрического смысла производной функции одной переменной, заключаем, что , где *α* – угол между осью *Ox* и касательной, проведенной к кривой  в точке  (рис.2).

Аналогично, , где *β –* угол между осью *Oy* и касательной, проведенной к кривой  в точке .

*x*

*y*

*z*

*x0*

*y0*

*M0*

*O*

*β*

*α*

*Рисунок 2*





### 

### *§5 Частные производные высших порядков*

Частные производные  и  называются ***частными производными первого порядка****.* Они тоже являются функциями двух переменных *x* и *y*. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются ***частными производными второго порядка*** и определяются следующим образом:



Аналогично определяются частные производные третьего и т.д. порядка. Частные производные второго или более высокого порядка, взятые по различным переменным, называются ***смешанными частными производными****.* Например, .

При этом следует учитывать, что если производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. Так, например, . Поэтому на практике достаточно найти одну из таких производных.

*Пример.*  Найти частные производные второго порядка функции .

*Решение.* Так как , то

 , .

Замечание. Понятия частных производных и производных высших порядков обобщаются на функции трех и более переменных.

Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 9, параграф 43, 4 п. 44.1, 44.2
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 15 п. 15.1-15.3